**1.-** Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{6}{ax} & \text{si } x > 1, \end{cases}$, $a \in R$, $a \neq 0$.

a) (1 punto) Calcule los valores de $a \in R$ para que la función f(x) sea continua.

b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función f(x), el eje OX y las rectas x = 0 y x = e sea 6 $u^2$.

**Solución**

Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{6}{ax} & \text{si } x > 1, \end{cases}$, $a \in R$, $a \neq 0$.

(a)

Calcule los valores de $a \in R$ para que la función f(x) sea continua.

Sabemos que $5 – ax^2$ es continua en R, en particular lo es en x < 1.

La función $\dfrac{6}{ax}$ es continua en R – {0}, en particular lo es en x > 1.

Falta estudiar la continuidad de f(x) en x = 1.

Sabemos que f es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (5 - ax^2) = 5 – a$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{6}{ax}\right) = 6/a$, como f(x) tiene que ser continua igualamos y tenemos $5 – a = 6/a \to 5a – a^2 = 6 \to 0 = a^2 – 5a + 6 \to a = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$, de donde **para que f sea continua los valores de “a” han que ser a = 2 y a = 3**.

(b)

Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función f(x), el eje OX y las rectas x = 0 y x = e sea 6 $u^2$.

*Para a = 2,* $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{6}{2x} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 5 - 2x^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La parábola $5 – 2x^2$ corta al eje OX en la solución de $5 – 2x^2 = 0 \to x^2 = 5/2 = 2'5 \to x = \pm\sqrt{(2'5)} \cong 1'58$, luego los límites de integración son 0 y 1 para la primera integral.

*Área* $= \int_0^1 (5 - 2x^2)dx + \int_1^e \left(\dfrac{3}{x}\right)dx = \left[5x - \dfrac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[3\cdot\ln|x|\right]_1^e = (5 - 2/3) + 3\ln(e) – 3\ln(1)$ u2 = *(13/3 + 3)* $u^2 \neq 6\, u^2$

*Para a = 3,* $f(x) = \begin{cases} 5 - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{6}{3x} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 5 - 3x^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

*Área* $= \int_0^1 (5 - 3x^2)dx + \int_1^e \left(\dfrac{2}{x}\right)dx = \left[5x - x^3\right]_0^1 + \left[2\cdot\ln|x|\right]_1^e = (5 – 1) + 2\ln(e) – 2\ln(1)$ u2 = *(4 + 2)* $u^2 \neq 6\, u^2$, **luego el valor pedido de a es 3**

**2.-** Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 1} \left(\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

**Solución**

$\lim_{x\to 1} \left(\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1} \left(\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{(0)^2}} = (1)^{+\infty}$. Indeterminación del número “e”.

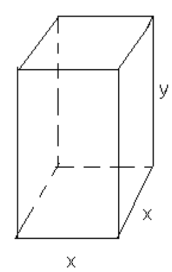
Recordamos la regla de L’Hôpital (L’H), que nos dice que si “f” y “g” son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

$$\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}(\operatorname{sen}(\pi x/2)-1)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)-1}{(1-x)^2}}=e^{\left\{\frac{1-1}{0^2}=\frac{0}{0},\ L'H\right\}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)\cdot(\pi/2)}{-2\cdot(1-x)}}=e^{\left\{\frac{0}{0},\ L'H\right\}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{-\operatorname{sen}(\pi x/2)\cdot(\pi/2)^2}{2}}=$$

$$=e^{\frac{-(\pi/2)^2}{2}}=e^{\left(\frac{-\pi^2}{8}\right)}.$$

**3.-** Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 $m^3$. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por $m^2$, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por $m^2$. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

**Solución**




*Función a Optimizar:* Coste $C = 140\cdot x^2 + 70\cdot(4xy) = 140\cdot x^2 + 280\cdot xy$ (No tiene tapa superior)
*Relación entre las variables:* Capacidad = Volumen = $64 = x^2\cdot y$, de donde $y = (64)/x^2$

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)
Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de g(x)

$C(x) = 140x^2 + 280x\cdot(64/x^2) = 140x^2 + 17920/x$.
$C'(x) = 280x - 17920/x^2$

De C '(x) = 0, tenemos $280x - 17920/x^2 = 0$, es decir $280x = 17920/x^2$, de donde $x^3 = 17920/280 = 64$, y calculando la raíz cúbica de 64 sale **x = 4 m**, posible máximo ó mínimo.

$C''(x) = 280 + 35840/x^3$
Como $C''(4) = 280 + 35840/(4)^3 = 280 + 560 = 840 > 0$, x = **4 es un mínimo relativo**.

De x = 4, tenemos $y = 64/4^2 = 4$ m, **luego las dimensiones del depósito son base x = 4 m y altura y = 4 m.**

**4.-** Para la siguiente función $f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$.
a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.
b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto x = 2.

**Solución**

(a)

Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

El denominador de f(x) se anula en $x^3 - x = 0 = x\cdot(x^2 - 1)$, de donde x = 0 y x = ± 1, posibles asíntotas verticales.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Como $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^0}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ ; la recta **x = 0 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^0}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Como $\lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^{-1}}{0^-} = \frac{1/e}{0^-} = -\infty$ ; la recta **x = -1 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^{-1}}{0^+} = \frac{1/e}{0^+} = +\infty$ .

Como $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^1}{0^-} = \frac{e}{0^-} = -\infty$; la recta **x = 1 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Posición relativa $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^1}{0^+} = \frac{e}{0^+} = +\infty$ .

Como la función exponencial $e^x$ crece mucho más rápido que la potencial $x^3$ o $x^4$ siempre tendremos

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3 - x} = +\infty$ , luego **f no tendrá asíntota horizontal ni oblicua en +∞.**

Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{-x^3 + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{-x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-x^3\cdot(e^x)} = \frac{1}{(-\infty)(+\infty)} = 0^-$ ; la recta **y = 0 es una asíntota horizontal (A.H) de la gráfica de f(x) en -∞,y siempre está por debajo de la gráfica.**

Si hay es este caso A.H en -∞ **no hay asíntotas oblicuas (A.H.) en -∞.**

(b)

Calcule la recta tangente a la curva en el punto x = 2.

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x};\quad f'(x) = \frac{e^x\cdot(x^3 - x) - e^x\cdot(2x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{e^x\cdot(x^3 - 2x^2 - x + 1)}{(x^3 - x)^2}.$$

La recta tangente en x = 2 es "y - f(2) = f '(2)(x - 2)".

Tenemos $f(2) = \frac{e^2}{2^3 - 2} = \frac{e^2}{6}$ y $f'(2) = \frac{e^2\cdot(2^3 - 2\cdot 2^2 - 2 + 1)}{(2^3 - 2)^2} = \frac{-e^2}{36}$.

Luego **la recta tangente en x = 2 es "y - ($e^2$/6) = (-$e^2$/36)·(x - 2)".**

**5.-** Dada la siguiente matriz: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz A = I + P, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de k ∈ R.

b) (1 punto) Para k = 1, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

**Solución**

Dada la siguiente matriz: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$.

(a)

Estudie el rango de la matriz A = **I** + P, donde **I** es la matriz identidad de orden 3, según los valores de k ∈ R

Tenemos $A = I + P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k+1 & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$.

Luego $|A| = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k+1 & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & -2k-1 \\ 0 & -k-1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= -(-k - 1)( -2k-1 - 0) = (k + 1)(-2k - 1)$.

De |A| = 0 tenemos (k + 1)(-2k - 1) = 0, de donde k = -1 y k = -1/2.

**Si k ≠ -1 y k ≠ -1/2,** tenemos |A| ≠ 0 y **rango(A) = 3.**

**Si k = -1**, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(-1)+1 & -2(-1) \\ 1 & -(-1) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 - 1 = 1 ≠ 0, **rango(A) = 2**.

**Si k = -1/2**, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(-1/2)+1 & -2(-1/2) \\ 1 & -(-1/2) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}$ = 3/2 - 1 = 1/2 ≠ 0, **rango(A) = 2.**

(b)
Para k = 1, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Para k = 1, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$ ; |A| = ((1) + 1)(-2(1) - 1) = 2·(-3) = -6.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

**6.-** Dadas las siguientes matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.
b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: **I** + BX = $C_1C_2$, donde **I** es la matriz identidad de orden 3.

**Solución**

Dadas las siguientes matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a)
Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela

Como $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix}$ = -(-1)(0 - 4) = -4 ≠ 0, existe la matriz inversa $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)$ .

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t) = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b)
Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: **I** + BX = $C_1C_2$, donde **I** es la matriz identidad de orden 3.

De **I** + BX = $C_1C_2$, tenemos BX = $C_1C_2$, - **I**. Multiplicando por la izquierda la expresión BX = $C_1C_2$, - **I** por $B^{-1}$ → $B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot(C_1C_2, - I)$ → $I\cdot X = B^{-1}\cdot(C_1C_2, - I)$, donde tenemos $\mathbf{X = B^{-1}\cdot(C_1C_2, - I)}$.

$C_1C_2, - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{X = B^{-1}\cdot(C_1C_2, - I)} = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 14 & -10 & 4 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

**7.-** Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$.

a) (1 punto) Discuta según los valores de a $\in$ R qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para a = 0.

**Solución**

(a)

Discuta según los valores de a $\in$ R qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2+4F_1 \\ F_3-5F_1 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 13 & 0 & 9 \\ -13 & 0 & a-10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 13 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (a-1)(0 + 13) = 13(a - 1).$

De |A| = 0, tenemos a - 1 = 0, de donde a = 1.

**Si a $\neq$ 1,** tenemos rango**(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

**Si a = 1**, tenemos $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 1 = -11 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2+4F_1 \\ F_3-5F_1 \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 13 & 0 & 7 \\ -13 & 0 & -7 \end{vmatrix}$ = 0 por tener dos filas proporcionales luego, rango(A*) = 2.

Como rango**(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas).**

(b)

Resuelva el sistema para a = 0.

**Si a = 0**, tenemos $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ya hemos visto en el apartado (a) que para a = 0 el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Gauss (También se puede hacer por Cramer).

$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \ (E_2+4E_1) \\ 2x - 5y \quad = -2 \ (E_3-5E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 13x \quad + 9z = 7 \\ -13x \ - 10z = -7 \ (E_3+E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 13x \quad + 9z = 7 \\ \quad - z = 0 \end{cases}$ ,de donde **z = 0, x = 7/13** y entrando en la primera 3(7/13) – y + 2(0) = 1 resulta **y =** 21/13 - 1 **= 8/13.**

**La solución del sistema es (x, y, z) = (7/13, 8/13, 0).**

**8.-** Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, -2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos A(1, 0, 1), B(3, 1, 0) y C(2, -1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

**Solución**

Un vector director **u** la recta (r) es el producto vectorial (x) de los vectores directores que determinan el plano, que podrían ser **AB** = (2, 1, -1) y **AC** = (1, -1 , 0), es decir **u = n = ABxAC =** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(0 - 1) - **j**(0 + 1) + **k**(-2 - 1) = (-1, -1, -3), que es equivalente (divido entre -1) al $\mathbf{u_1}$ = (1, 1, 3).

La ecuación continua de la recta es $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$. **La ecuación implícita de la recta que me piden es**:

$\pi_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} \equiv x - y - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{z}{3} \equiv 3x - z - 3 = 0$, **es decir** $r \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$.

**9.-** En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.
a) (0’8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.
b) (1’2 puntos*)* Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.
**Solución**

Este problema se puede realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles). Llamamos D al suceso “software defectuoso” y $D^C$ al suceso “software no defectuoso”.

| | Coche eléctrico = A | Coche hibrido = B | Total |
|---|---|---|---|
| D | 12 | | 43 |
| $D^C$ | | | |
| Total | 85 | 145 | |

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

| | Coche eléctrico = A | Coche hibrido = B | Total |
|---|---|---|---|
| D | 12 | **31** | 43 |
| $D^C$ | **73** | **114** | **187** |
| Total | 85 | 145 | **230** |

(a)
Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

Me piden **p(coche hibrido y software correcto) = p(B∩D^C) =**

**=** $\frac{\text{Total de coches híbridos con software correcto}}{\text{Total de coches}}$ = **114/230 ≅ 0’49565**.

(b)
Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Me piden **p(software defectuoso, sabiendo que el coche es hibrido) = p(D/B) =**

**=** $\frac{\text{Total de coches híbridos con software defectuoso}}{\text{Total de coches híbridos}}$ = **31/145 ≅ 0’21379**.

**10.-** Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.
a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?
b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

**Solución**

(a)
¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

Recordamos que si realizamos **n** veces (9) un experimento, elegimos 9 deportistas, en el que podemos obtener éxito, **F**, elegir un deportista entre 7, con probabilidad **p** ( p(F) = 1/7) y fracaso, $\mathbf{F^C}$, con probabilidad **q** (q = = 1 - p = 1 - 1/7 = 6/7), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)**.

Es decir nuestra variable **X, elegir un deportista para las olimpiadas, sigue una distribución binomial B(n; p)** = **B(9; 1/7)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (9 \text{ sobre } k)\cdot(1/7)^k\cdot(6/7)^{(9-k)} = \binom{9}{k}\cdot(1/7)^k\cdot(6/7)^{(9-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X = 2) = \binom{9}{2}\cdot(1/7)^2\cdot(6/7)^{(7)} = \frac{9!}{2!\cdot 7!}\cdot(1/7)^2\cdot(6/7)^{(7)} \cong 0'2497347.}$

(b)
¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

En nuestro caso piden **p(al menos un deportista sea elegido para las olimpiadas) = p(X ≥ 1) =**

= {suceso contrario} $\mathbf{= 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{9}{0}\cdot(1/7)^0\cdot(6/7)^{(9)} = 1 - 1\cdot 1\cdot(6/7)^{(9)} =}$

**= 1 - 0'249734705 ≅ 0'7502652985.**